1. Mengen

1.1 naive Def. (Cantor, 1898)

„Eine Menge M ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen."

→ Menge wird durch Angabe ihrer Elemente definiert

→ zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben

1.2 Notation:

$m \in M \;:\Leftrightarrow\;$ m ist Element von M

$m \notin M \;:\Leftrightarrow\; \neg\,(m \in M)$

s.o. "nicht"

Beispiele:

Mengen-
Klammern

$$M := \{2, -5, 8, \pi\}$$

Elemente

linke Seite
wird definiert
durch die rechte

$$= \{8, \pi, 2, -5\}$$

Reihenfolge
egal

$$= \{2, 2, 2, -5, 8, \pi, \pi\}$$

Mehrfachnennung egal

$$2 \in M$$

$$7 \notin M$$

wichtige Beispiele:

$\mathbb{N}$:= natürliche Zahlen
$= \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$:= ganze Zahlen
$= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$:= rationale Zahlen (Brüche)

$$= \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$$

„mit der Eigenschaft, dass …"

Mehrfachnennung egal!

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$$

$\mathbb{R}$:= reelle Zahlen (→ Analysis)

$\mathbb{C}$:= komplexe Zahl

$\emptyset$:= leere Menge
$= \{\}$

1.3 Def: Eine Teilmenge N einer Menge M ist eine Menge, deren Elemente allesamt auch in M liegen. Wir schreiben

$$N \subseteq M$$

In Symbolen: $N \subseteq M \;:\Leftrightarrow (x \in N \Rightarrow x \in M)$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in N : x \in M)$$

$$N \not\subseteq M \;:\Leftrightarrow \neg (N \subseteq M)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x \in N : x \in M)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in N : x \notin M)$$

$$\neg(\forall \ldots : \ldots)$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists \ldots : \neg(\ldots)$$

Beispiele:

$$\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$M \subseteq \mathbb{R}$ (für M wie oben)

$M \not\subseteq \mathbb{Z}$ da $\pi \notin \mathbb{Z}$.

1.4 Notiz: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie wechselseitig Teilmengen voneinander sind:

$$N = M \iff (N \subseteq M \wedge N \supseteq M)$$

Elemente von Mengen können auch selbst Mengen sein, z.B.

$$M = \{\emptyset, \mathbb{Z}, 5\}$$

⚠ „~~M enthält N~~" ist zweideutig:

$N \in M$ „N ist ein Element von M"

$N \subseteq M$ „N ist Teilmenge von M"

1.5 Konstruktion:

M Menge

E Eigenschaft, die die Elemente haben können

Dann ist

$$\{m \in M \mid m \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

die Teilmenge derjenigen Elemente von M, die Eigenschaft E haben.

~~Bsp~~:

$$M := \{2, -5, 8, \pi\}$$

$$\{m \in M \mid m \geq 0\} = \{2, 8, \pi\}$$

$$\{m \in M \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{2, -5, 8\}$$

1.6 Warnung:

Es gibt kein Universum.

- Es gibt keine Menge, die als Elemente alle Mengen hat.

→ Cantors Zugang für „große“ Menge zu naiv.
Aber gut genug für LinA.

Beweis zu 1.6: durch Widerspruch

Annahme: Es gibt so eine Menge $\mathcal{U}$

Betrachte Teilmenge

$$T := \{ M \in \mathcal{U} \mid M \notin M \}$$

Es muss gelten

$$T \in T \quad \text{oder} \quad T \notin T$$

$$\swarrow \qquad\qquad\qquad \searrow$$

$$T \notin T \qquad\qquad\qquad T \in T$$

$$\lightning \qquad\qquad\qquad \lightning$$

Also führt die Annahme zu einem Widerspruch. Sie muss also falsch sein.

Beweisende → $\square$

Konstruktionen mit Teilmengen

M Menge

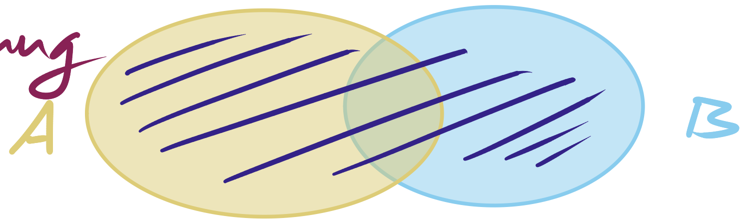
$A, B, C \subseteq M$

1.7 Def:

oder

$$A \cup B := \{ m \in M \mid m \in A \vee m \in B \}$$

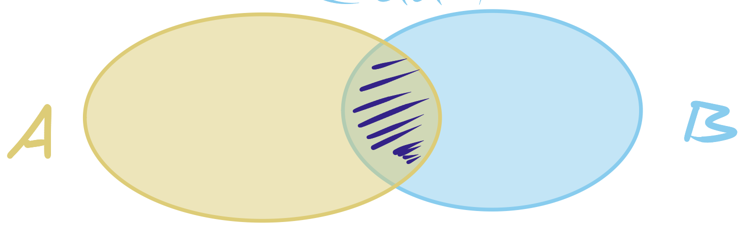
Vereinigung



$$A \cap B := \{ m \in M \mid m \in A \wedge m \in B \}$$

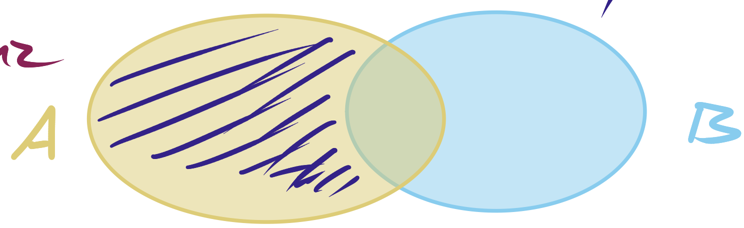
und

Schnitt



$$A \setminus B := \{ m \in M \mid m \in A \wedge m \notin B \}$$

Differenz

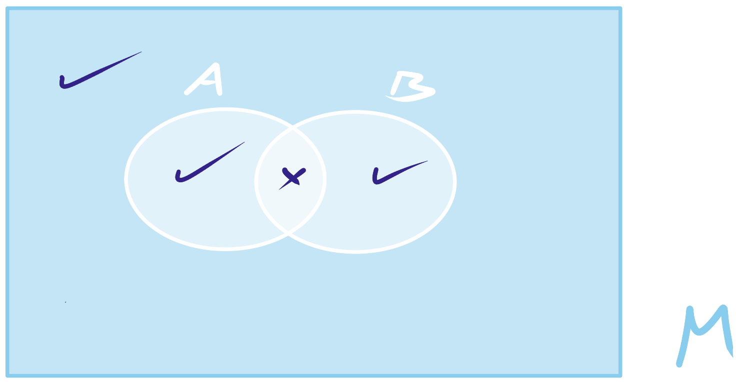


$M \setminus B$ Komplement von B in M

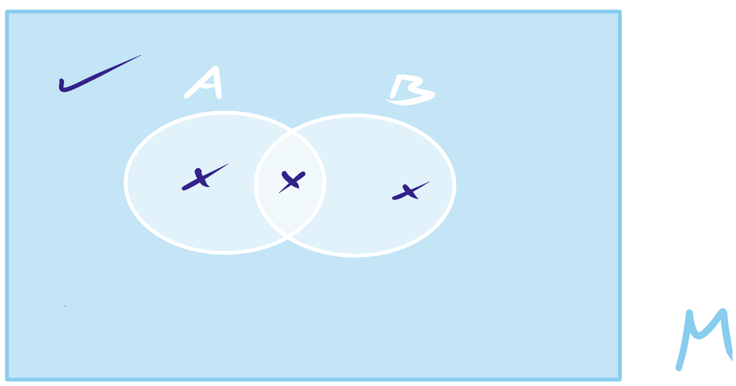
A und B sind disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$.
In diesem Fall schreiben wir $A \dot\cup B$ für $A \cup B$.

1.8 Satz (de-Morgansche Regel)

$$M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

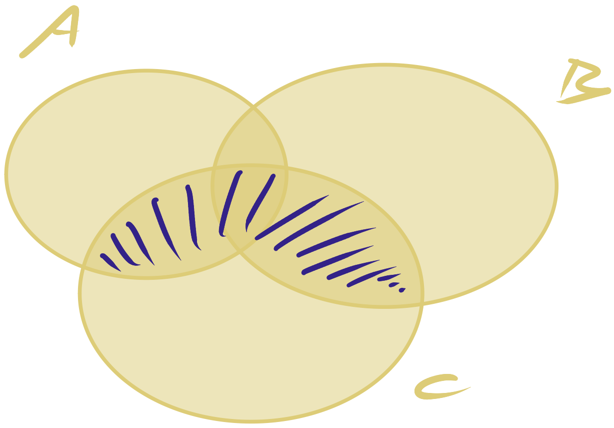


$$M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$$

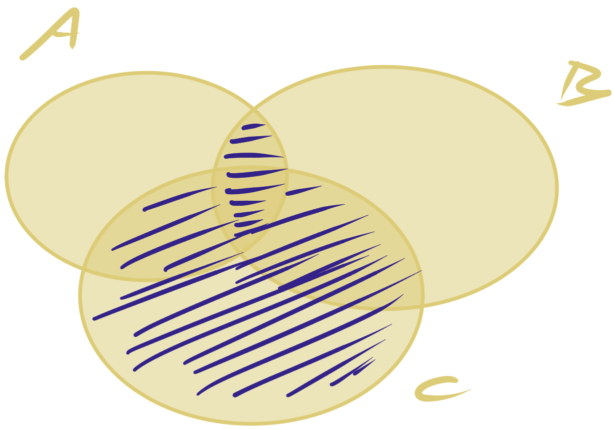


1.9 Satz (Distributivität)

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$



$$(A \cap B \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$



Beweise zu 1.8 & 1.9:
zurückführen auf elementare Aussagen-
logik

Beachte

Aussagen

$\neg(X \vee Y)$ ist äquivalent zu $(\neg X) \wedge (\neg Y)$
$\neg(X \wedge Y)$ " " " $(\neg X) \vee (\neg Y)$

z.B. 1.8(a): Für ein Element $m \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} m \in M \setminus (A \cap B) &\iff m \notin (A \cap B) \\ &\iff \neg(m \in A \cap B) \\ &\iff \neg(m \in A \wedge m \in B) \\ &\iff \neg(m \in A) \vee \neg(m \in B) \\ &\iff m \notin A \vee m \notin B \\ &\iff (m \in M \setminus A) \vee (m \in M \setminus B) \\ &\iff m \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B) \end{aligned}$$

$\square$

usw.

Allgemeiner: I Menge „Indexmenge"
für jedes $i \in I$
$A_i \subseteq M$

1.10 Def:

es existiert

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{ m \in M \mid \exists i \in I : m \in A_i \}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{ m \in M \mid \forall i \in I : m \in A_i \}$$

Für $I = \{1, \dots, n\}$ also

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$$

Beispiele:

$M = \mathbb{R}$ $\qquad I = \mathbb{N}$ ohne Null

$\cup\!\vert$

$A_i = \{0, 1, 2, \dots, i\}$

$A_1 = \{0, 1\}$

$A_2 = \{0, 1, 2\}$

usw.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}_0$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0, 1\}$$

1.8' Satz (de Morgan)

$$M \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) = \bigcup_{i\in I} (M \setminus A_i)$$

$$M \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) = \bigcap_{i\in I} (M \setminus A_i)$$

1.9' Satz (Distributivität)

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) \cap C = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap C)$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) \cup C = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup C)$$

Beweise zu 18' und 19':

Wie oben - beachte:

$\neg(\forall m \in M : X)$ ist äquiv. zu $\exists m \in M : \neg X$

$\neg(\exists m \in M : X)$ " $\forall m \in M : \neg X$

z.B.

$$\begin{aligned}
m \in M \setminus \left(\bigcap_i A_i\right) &\Leftrightarrow m \notin \bigcap_i A_i \\
&\Leftrightarrow \neg\left(m \in \bigcap_i A_i\right) \\
&\Leftrightarrow \neg(\forall i \in I : m \in A_i) \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I : \neg(m \in A_i) \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I : m \notin A_i \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I : m \in M \setminus A_i \\
&\Leftrightarrow m \in \bigcup_i (M \setminus A_i) \qquad \square
\end{aligned}$$

Konstruktionen mit abstrakten Mengen

1.11 Def: I eine Menge

Ein I-Tupel ist eine Familie von Elemente $(x_i)_{i \in I}$, die durch die Elemente von I indiziert werden.

Zwei I-Tupel sind genau dann gleich, wenn sie für jedes $i \in I$ denselben Eintrag haben:

$$(x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} \Longleftrightarrow \left(\forall i \in I : x_i = y_i \right)$$

Für $I = \{1, \dots, n\}$ sprechen wir von n-Tupeln.

$$(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$\begin{array}{c} (x_1, \dots, x_n) \\ \parallel \\ (y_1, \dots, y_n) \end{array} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \\ \qquad \dots \wedge x_n = y_n \end{array} \right)$$

Beispiel:

$$(2, -5, 8, \pi) \neq (-5, 2, 8, \pi)$$

$$(2, 2, 5) \neq (2, 5, 5)$$

Im Folgenden: I Indexmenge
M_i (für $i \in I$) Menge

1.12 Def: Die disjunkte Vereinigung der Mengen M_i ist

$$\coprod_{i \in I} M_i := \{ (m, i) \mid i \in I,\ m \in M_i \}$$

umgedrehtes großes π

$$\left(\coprod_{i \in \{1,\dots,n\}} M_i = M_1 \sqcup M_2 \sqcup \dots \sqcup M_n \right)$$

Beispiel:

$$M_1 = \{5, 10\} \subseteq \mathbb{N}$$
$$M_2 = \{10, 15\} \subseteq \mathbb{N}$$

$M_1 \cup M_2 = \{5, 10, 15\}$ ← 3 Elemente

$$M_1 \sqcup M_2 = \{ \underbrace{(5,1), (10,1)}_{\text{von } M_1}, \underbrace{(10,2), (15,2)}_{\text{von } M_2} \}$$

4 Elemente

1.13 Def: Das (kartesische) Produkt der Mengen M_i ist

$$\prod_{i\in I} M_i := \{(x_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I: x_i \in M_i\}$$

$$\prod_{i\in\{1,\dots,n\}} M_i = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

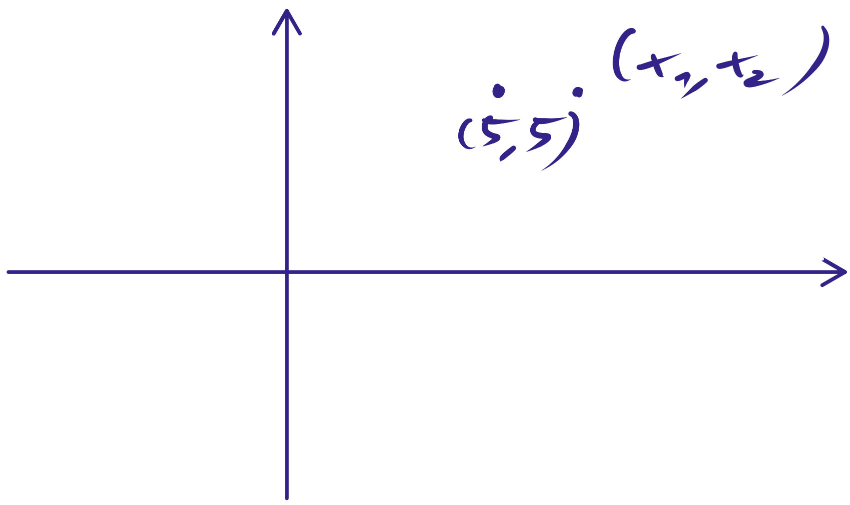
Sind alle M_i gleich $(\forall i \in I: M_i = M)$ schreiben wir auch

$$M^I := \prod_{i\in I} M$$

$n \in \mathbb{N}$: $$M^n := \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{n \text{ Faktoren}}$$

Beispiel:

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3)$

$\mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Konvention: $\prod_{i\in\emptyset} := \{*\}$

Menge mit genau einem Element

1.14 Auswahlaxiom:

Für eine beliebige Indexmenge I und beliebige nicht-leere Menge M_i ist auch $\prod_{i\in I} M_i$ nicht leer.

Klingt offensichtlich, ist aber in Formalisierungen der Mengenlehre eine zusätzliche Annahme („ein Axiom").

1.15 Def: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M.

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$

Beispiel:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$